Espacios de Señales

Prof. José Ferrer, Br. Gabriel Marzinotto, Br. Alejandro Pérez,
Departamento de Procesos y Sistemas
Universidad Simón Bolívar

Septiembre-Diciembre 2013

Abstract

En estas notas se presentan lasciertas operaciones binarias básicas de gran utilidad en la teoría de señales y sistemas de tiempo continuo y/o de tiempo discreto. También se introducen por primera vez las operaciones "suma" y "derivada" generalizada con el objeto de explotar las similitudes entre las operaciones de suma estándard e integral, por un lado, y las de derivada y desplazamiento unitario por otro lado. También definiremos dos operaciones binarias sobre el conjunto de señales $S_e = S_e(T, K)$ de amplio uso en la tería de sistemas lineales e invariantes en el tiempo y procesos aleatorios estacionarios: convolución y correlación.

1 Operaciones Binarias de Señales

Sea D un conjunto no vacío, entonces se denomina relación binaria sobre D a todo conjunto $R \subset D \times D = D^2$.

DEFINICION 1 *Dado un conjuntos $D \neq \emptyset$, una operación binaria interna (o ley de composición interna) sobre D es una aplicación $f : D \times D \to D$. La imagen $f(a, b)$ del par (a, b) se acostumbra a representarse medianmte un símbolo $*$, por ejemplo, y escribiendo $a * b$ en vez de $f(a, b)$. Al elemento $a * b$ de D se dice ser el resultado (o compuesto) de a por b mediante la operación $*$.*

En estas notas nos concetraremos principalmente en operaciones binarias internas definidas sobre el conjunto de señales

$$D = S_e = S_e(T, K) = \{f/f : T \to K\}$$

para un eje de tiempo T y un cuerpo de números K (Q, R o C) (ambos arbitrarios pero fijos).

En el área de Ingeniería de Sistemas, las operaciones binarias internas sobre S_e mas importantes desde el punto de vista práctico en el area son:

1. Operaciones Estándares sobre señales : "Suma estándard" o "Suma punto a punto" y "Multplicación estándard" o "Multiplicación punto a punto"
2. Convolución
3. Correlación
4. Concatenación
5. Máxima/Mínima

1.1 Operaciones Estándares sobre Señales

DEFINICION 2 *Se definen como operaciones estándares sobre el conjunto de señales* S_e *a las operaciones binarias internas de suma y multiplicación punto a punto. Esto es:*

a) Suma de señales: Considere la operación binaria

$$+ : S_e \times S_e \to S_e : (f, g) \longmapsto f + g$$

donde para cada $\lambda \in T$:

$$[f + g](\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda)$$

b) Multiplicación de señales: Considere la operación binaria

$$. : S_e \times S_e \to S_e : (f, g) \longmapsto f.g$$

donde para cada $\lambda \in T$:

$$[f.g](\lambda) = f(\lambda)\, g(\lambda)$$

De lo anterior, podemos decir que la suma de dos señales $f, g \in S_e$ es una señal cuyos valores es igual a la suma de los valores de las señales "sumados" en esos instantes. Para ilustrar dicha operación en distintos ejes de tiempo, consideremos los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 3 *La suma de las señales de tiempo discreto*

$$f(k) = \begin{cases} 0, & k \leq -2, \\ 2^{-k} + 5, & k \geq -1 \end{cases}$$

y

$$g(k) = \begin{cases} 3.2^k, & k < 0, \\ k + 2, & k \geq 0. \end{cases}$$

es

$$\begin{aligned} h(k) &= (f + g)(k) = f(k) + g(k) \\ &= \begin{cases} 3.2^k, & k \leq -2, \\ \frac{17}{2}, & k = -1, \\ 2^{-k} + k + 7 & k \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

y su producto estándard es

$$[f.g]\,(k) = f\,(k)\,.g\,(k) = \begin{cases} 0, & k \leq -2, \\ \frac{21}{7}, & k = -1, \\ 2^{-k} + k + 7, & k \geq 0. \end{cases}$$

EJEMPLO 4 *Considere las siguientes señales de tiempo continuo: para todo* $t \in T = (-\infty, +\infty)\,,$

$$f\,(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0 \\ \cos\,(2\pi t) & t < 0. \end{cases}$$

e

$$y\,(t) = -\cos\,(2\tau t)$$

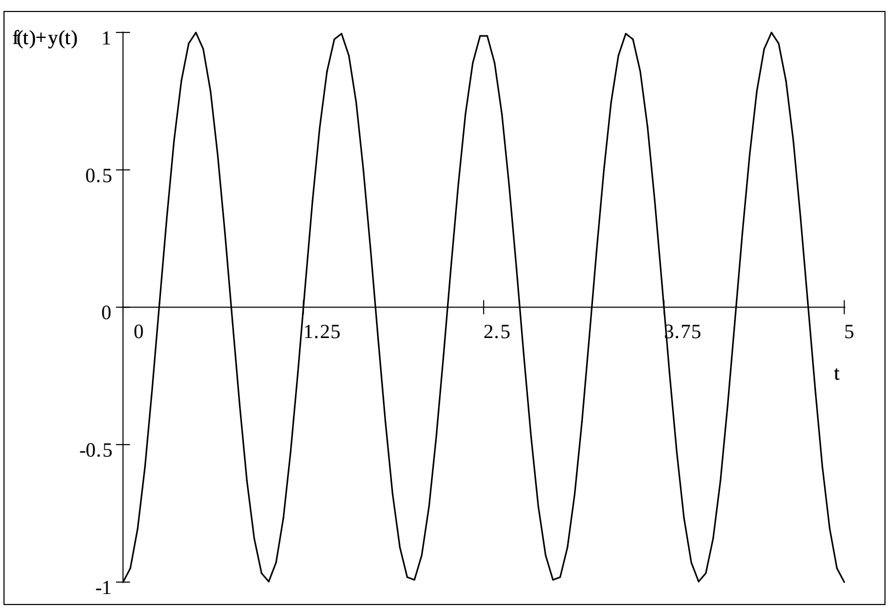
Es evidente que si recordamos la definición tanto de la señal escalón unitario como de la operación reflexión temporal conjuntamente con la de multiplciaión estándard de señales, concluimos en primer lugar que

$$f\,(t) = \cos\,(2\pi t)\,.esc\,(-t)$$

mientras que

$$[f+y]\,(t) = f\,(t) + y\,(t) = \begin{cases} -\cos\,(2\pi t)\,, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

la cual se muestra en la figura (4)



Suma de dos señales $f\,(t)$ *e* $y\,(t)$

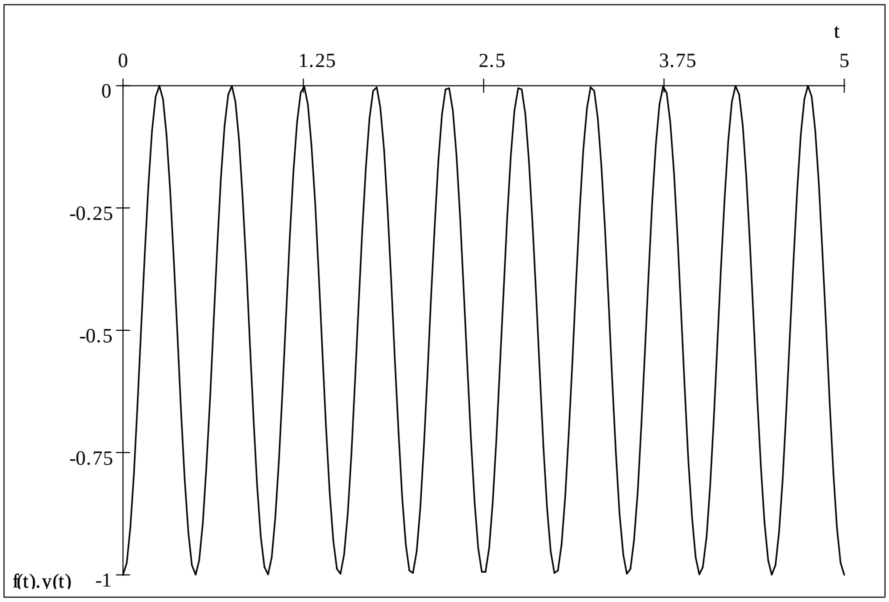


Figure 1: Multiplicación de las señales $f(t)$ e $y(t)$

Mientras que la multiplicación punto a punto de dichas señales genera

$$[f.y](t) = f(t).y(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0 \\ -\cos^2(2\pi t) & t < 0. \end{cases}$$

Recordando que

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

se tiene

$$[f.y](t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0 \\ -\frac{1+\cos(4\pi t)}{2} & t < 0. \end{cases}$$

y la cual se ilustra en la figura (1)

Obviamente si empleamos el método de recurencia, podemos definir operaciones terciarias, cuaternarias, etc. Podemos entonces considerar conuntos de señales (finitos o no) indexados por un conjunto $\Gamma \neq \varnothing$

$$\{f_\mu : \forall \mu \in \Gamma, f_\mu \in S_e\}$$

podemos definir la suma estandar o puntual de la familia de señales $\{f_\mu : \forall \mu \in \Gamma, f_\mu \in S_e\}$ de *la* siguiente manera: para cada $\lambda \in T$,

$$\left[\sum_{\mu\in\Gamma} f_\mu\right](\lambda) = \sum_{\mu\in\Gamma} f_\mu(\lambda) \tag{1}$$

Sin embargo, más allá del preciosismo matemático, nos interesa el caso donde $\Gamma = Z = T$ y $f_\mu = f \in S_e$ para cada $\mu \in T = \Gamma$,para motivar una de las operaciones mas importantes de la teoría "general" de señales y sistemas. Por lo tanto, bajo las suposiciones hechas (1) se reduce a

$$\left[\sum_{\mu\in\Gamma} f_\mu\right](\lambda) = \sum_{k\in T} f_\mu(\lambda) = \sum_{k\in T} f(k)$$

Recordemos ahora que dado un eje de tiempo T, fijo pero de naturaleza arbitraria, el cual es un conjunto totalmene ordenado con respecto a una relacion " $\leq$ ", entonces el eje de tiempo inverso T_{inv} se define mediante la regla: si $\lambda_a, \lambda_b \in T$ y $\lambda_a \leq \lambda_b$, entonces $\lambda_a, \lambda_b \in T^{inv}$ y $\lambda_b \leq \lambda_a$. En otras palabras, tenemos un base de tiempo dual o reflexiva en el sentido que los eventos pasados o futuros en T se transforman en eventos futuros o pasados en T^{inv}.

Definamos la suma generalizada de una señal $f \in S_e = S_e(T, K)$ como

$$Ⓢ\int_{\lambda\in T} f(\lambda)\,\mu(\lambda) = \begin{cases} \int_{teT} f(t)\,dt, & \lambda = t \in T \subset R. \\ \sum_{k\in T} f(k)\,\mu(k), & \lambda = k \in T \subset Z \\ -\sum_{k\in T^{inv}} f(k)\,\mu(k), & \lambda = k \in T^{inv} \subset Z \end{cases} \qquad (2)$$

donde

$$\mu(k) = \begin{cases} +1, & k \in T \subset Z, \\ -1, & k \in T^{inv} \subset Z \end{cases}$$

siempre y cuando el espaciado en T sea uniforme e igual a 1. Esto quiere decir que para todo $k \in T$, se tiene

$$\begin{aligned} k^- &= previo(k) = k - 1 \\ k^+ &= siguiente(k) = k + 1 \end{aligned}$$

¿Qué sucede cuando el espaciado en T es uniforme pero de "período" $h > 0$?. Esta situación ocurre cuando la base de tiempo T es tal que para todo instante de tiempo $k \in T$, se tiene

$$\begin{aligned} k^- &= k - h \\ k^+ &= k + h \end{aligned}$$

mientras que si $k \in T^{inv}$

$$\begin{aligned} k^- &= k + h \\ k^+ &= k - h \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\mu(k) = k - k^- = \begin{cases} +h, & k \in T \subset Z, \\ -h, & k \in T^{inv} \subset Z \end{cases}$$

Este tipo de base de tiempo es importante en el estudio de Sistemas de Datos Muestreados donde se una un computador digital para controlar automáticamente un proceso o sistema de tiempo continuo tal como veremos más adelante. Las bases de tiempo T con período $h \neq 1$ se representan en general como subintervalos de $Z(h)$, esto es:

$$\begin{aligned} T &\subset Z(h) = \{kh : k \in Z\} \\ &= \{\cdots, -2h, -h, 0, h, 2h, \cdots\} \end{aligned}$$

El objetivo principal que buscamos al introducir esta operación de suma "generalizada" sobre señales es el de "unificar", de una manera naive pero efectiva, la teoría de señales y sistemas de tiempo continuo y su contraparte de tiempo discreto. Por lo tanto, conoceremos mejor sus analogías y detectaremos rápidamente sus diferencias y así el estudiante comenzará a 1) extrapolar resultados y 2) generalizar métodos de diseño de el mundo de tiempo discreto al mundo de tiempo continuo y/o viceversa.

Ademas recuerde que tanto la integral como la sumatoria son sumas y en consecuencia comparten una gran cantidad de propiedades análogas que queremos explotar.

Denote por T^{cont} a ka familia de todas las bases de tiempo continuas; esto es,

$$T^{cont} = \{T : (T, \leq) \trianglelefteq (R. \leq)\}$$

Toda base de tiempo continua es un subconjunto ordenado de R, y es eso específicamente lo que denota el símbolo " $\trianglelefteq$ ".

Por lo tanto, todas las bases de tiempo continua en T^{cont} son bases de tiempo que cumplen con las condiciones siguientes:

1. Toda $T \in T^{cont}$ es un sunconjunto de los números reales, o sea, $T \subset R$,
2. Si $t_1, t_2 \in T$ y $t_1 \leq t_2$ en T, entonces $t_1 \leq t_2$ en R.

De manera similar, denote por T^{disc} a ka familia de todas las bases de tiempo continuas; esto es,

$$T^{disc} = \{T : (T, \leq) \trianglelefteq (Z. \leq)\}$$

Toda base de tiempo discreta es un subconjunto ordenado de Z, y es eso específicamente lo que nuevamente denota el símbolo " $\trianglelefteq$ ".

Por lo tanto, todas las bases de tiempo discreta en T^{disc} son bases de tiempo que cumplen con las condiciones siguientes:

1. Toda $T \in T^{disc}$ es un sunconjunto de los números enteros, o sea, $T \subset Z$,
2. Si $k_1, k_2 \in T$ y $k_1 \leq k_2$ en T, entonces $k_1 \leq k_2$ en Z.

Un conjunto $P \subset K$ (R o Z) es un intervalo de K si es de cualquiera de las formas siguientes:

1. Intervalo cerrado:

$$[\lambda_1, \lambda_2] = \{\lambda \in T : \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2\}$$

2. Intervalo abierto:

$$(\lambda_1, \lambda_2) = \left\{\lambda \in T : \lambda_1^+ \leq \lambda \leq \lambda_2^-\right\}$$

3. Intervalo semiabierto:

$$\begin{aligned} [\lambda_1, \lambda_2) &= \left\{\lambda \in T : \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2^-\right\} \\ (\lambda_1, \lambda_2] &= \left\{\lambda \in T : \lambda_1^+ \leq \lambda \leq \lambda_2\right\} \end{aligned}$$

4. Intervalo semi-infinito:

$$\begin{aligned} [\lambda_1, +\infty) &= \{\lambda \in T : \lambda_1 \leq \lambda\} \\ (\lambda_1, +\infty) &= \left\{\lambda \in T : \lambda_1^+ \leq \lambda \leq +\infty\right\} \\ (-\infty, \lambda_1) &= \left\{\lambda \in T : \lambda \leq \lambda_1^-\right\} \\ (-\infty, \lambda_1] &= \{\lambda \in T : \lambda \leq \lambda_1\} \end{aligned}$$

5. Intervalo infinito:

$$(-\infty, +\infty) = K, (R \text{ o } Z)$$

Los ejemplos son muy elementales; sin embargo, en aras de la claridad veamos a continuación algunos csos de interés.

EJEMPLO 5 *a) Son intervalos de tiempo continuo continuos los siguientes conjuntos (o bases de tiempo):* $(-\infty, +\infty), [-3, +\infty)$, $(-\infty, +12.4)$, $(-\pi, 3), [-e, 122]$ *y* $(5, 10\pi]$, *etc.*

b) Son intervalos de tiempo discreto: i)) los enteros positivos

$$Z_+ = (0, +\infty) = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

ii) los conjuntos

$$\begin{aligned} [-3, +\infty) &= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \\ (-3, +\infty) &= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} = [-2, +\infty) \\ (-3, +5) &= \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} = [1, 4] \end{aligned}$$

Si convenimos en considerar los conjuntos de numeros K extendidos, esto es, ahora incluimos a $+\infty$ y -∞ como números de los distintos conjustos de números K que usamos como bases de tiempo, se tiene

$$K_{ext} = K \cup \{-\infty, +\infty\}$$

y acordamos que desde ahora en adelante

$$K \longleftarrow K_{ext}$$

es posible desarrollar un gran parte de nuestra teoría de señales para señales con eje de tiempo que sean unión de intervalos cerrados y sin perdida de generalidad alguna podemos suponer que eos intervalos son disjuntos.

DEFINICION 6 *Dado un intervalo $T = [\lambda_a, \lambda_b]$ de una base de tiempo discreta o continua, defina el diámetro de T como*

$$\begin{aligned} diam\,(T) &= diam\,([\lambda_a, \lambda_b]) \\ &= \lambda_a - \lambda_b \end{aligned}$$

y donde definimos para todo λ finito

$$\begin{aligned} \lambda - (-\infty) &= +\infty \\ +\infty - \lambda &= +\infty \\ +\infty - (-\infty) &= +\infty \end{aligned}$$

DEFINICION 7 *Una base de tiempo T (conjunto no vacío, subconjunto completamente ordenado con respecto a la relación de orden $\leq$ de R) es una* ***base de tiempo generalizada*** *si se cumplen las siguientes tres condiciones:*

1. *Existe una familia de intervalos cerrados $\{T_\eta : \eta \in N\}$ tal que para todo par de intervalos T_α, T_β con $\alpha, \beta \in N$ y $\alpha \neq \beta$, $T_a \cap T_\beta = \emptyset$, y*

$$T = \cup_{\eta \in N} T_\eta$$

2. *Para cada intervalo $T_\eta = \left[\lambda_a^{(\eta)}, \lambda_\beta^{(\eta)}\right]$ con $\lambda_a^{(\eta)} \leq \lambda_\beta^{(\eta)}$, se tiene que existe una función sobreyectiva*

$$\psi : T_\eta^{disc} = \left[k_a^{(\eta)}, k_\beta^{(\eta)}\right] \to T_\eta^{cont} = \left[t_a^{(\eta)}, t_\beta^{(\eta)}\right]$$

   donde

$$\begin{aligned} \psi\left(k_a^{(\eta)}\right) &= t_\alpha^\eta, \\ \psi\left(k_\beta^{(\eta)}\right) &= t_b^\eta \end{aligned}$$

   y para cada par $k_i^{(\eta)}, k_j^{(\eta)} \in T_\eta^{disc}$ con $i \neq j$ se tiene que $\psi\left(k_i^{(\eta)}\right) \neq \psi\left(k_j^{(\eta)}\right)$.

3. Para cada intervalo $T_\eta = \left[\lambda_a^{(\eta)}, \lambda_\beta^{(\eta)}\right]$, *se cumple que*

$$\begin{aligned} diam\left(\left[t_a^{(\eta)}, t_\beta^{(\eta)}\right]\right) &< \infty \Leftrightarrow diam\left(\left[k_a^{(\eta)}, k_\beta^{(\eta)}\right]\right) < \infty \\ diam\left(\left[t_a^{(\eta)}, t_\beta^{(\eta)}\right]\right) &= \infty \Leftrightarrow diam\left(\left[k_a^{(\eta)}, k_\beta^{(\eta)}\right]\right) = \infty \end{aligned}$$

En cuyo caso diremos que lor intervalos $\left[t_a^{(\eta)}, t_\beta^{(\eta)}\right]$ *y* $\left[k_a^{(\eta)}, k_\beta^{(\eta)}\right]$ *son* ***análogos.***

EJEMPLO 8 *a) las bases de tiempo* $T^{cont} = [-\infty, +\infty] = R_{ext}$ *y* $T^{disc} = Z \cup \{-\infty, +\infty\} = Z_{ext}$ *son análogas y por lo tanto,* $T = [-\infty, +\infty]$ *es una base de tiempo generalizada.*

b) las bases de tiempo $T^{cont} = [0, +\infty] \subset R_{ext}$ *y* $T^{disc} = Z_{\geq 0} = \{0, 1, 2, \cdots, +\infty\} = Z_{ext}$ *son análogas y por lo tanto,* $T = [0, +\infty]$ *es una base de tiempo generalizada.*

c) las bases de tiempo $T^{cont} = [-\infty, 0] \subset R_{ext}$ *y* $T^{disc} = Z_{\leq 0} = \{-\infty, \ldots, -2, -1.0\} = Z_{ext}$ *son análogas y por lo tanto,* $T = [-\infty, 0]$ *es una base de tiempo generalizada*

d) las bases de tiempo $T^{cont} = [t_\alpha, t_\beta]$, a, b *finitas y* $a \leq b$, *y* $T^{disc} = [k_a, k_\beta] = \{k_\alpha, k_\alpha + 1, \ldots, .k_\beta\}$, k_α, k_b *finitas, son análogas y por lo tanto,* $T = [\lambda_\alpha, \lambda_\beta]$ *es una base de tiempo generalizada.*

e) las bases de tiempo $T^{cont} = [-\infty, 0] \subset R_{ext}$ *y* $T^{disc} = [k_a, k_\beta] = \{k_\alpha, k_\alpha + 1, \ldots, .k_\beta\}$, k_α, k_b *finitas no son análogos.*

DEFINICION 9 *Dada una base de tiempo mT generalizada, una señal* $f \in S_e = S_e(T, K)$ *se dice ser sumable-s.g. (en el sentido generalizado) sobre* T *si y solamente si*

$$\left| Ⓢ \int_{\lambda \in T} f(\lambda)\, \mu(\lambda) \right| < \infty$$

Una señal $f \in S_e$ *se dice ser absolutamente sumable-s.g sobre la base de tiempo* T *si y solamente si*

$$Ⓢ \int_{\lambda \in T} |f(\lambda)|\, \mu(\lambda) < \infty$$

Desde ya notamos :

1. Si T es una base de tiempo continuo, una señal f es sumable-s.g sobre T si f es integrable sobre T.

2. Si T es una base de tiempo discreto, una señal f es sumable-s.g. si f es sumable sobre T.

1.1.1 Propiedades de la Suma Generalizada

A continuación se presentan una serie de propiedades que son consecuencia directa de las definiciones de la integral de Rieman y de la Sumatoria de números y en cada una de las aseveraciones se asume que las baes de tiempo involucradas son bases de tiempo generalizadas.

TEOREMA 10 (Linealidad) *Sean $f, g \in S_e(T, K)$ señales sumables-s.g., entonces*

1. *(Homogeneidad) Para todo $\alpha \in K$,*

$$Ⓢ\int_{\lambda\in T} \alpha . f(\lambda)\,\mu(\lambda) = \alpha \left\{ Ⓢ\int_{\lambda\in T} f(\lambda)\,\mu(\lambda) \right\}$$

2. *(Aditividad)*

$$Ⓢ\int_{\lambda\in T} [f(\lambda) + g(\lambda)]\,\mu(\lambda) = Ⓢ\int_{\lambda\in T} f(\lambda)\,\mu(\lambda) + Ⓢ\int_{\lambda\in T} g(\lambda)\,\mu(\lambda)$$

En consecuencia, la operación suma generalizada es lineal.

DEMOSTRACION. *Recordemos que la base de tiempo T es totalmente ordenada en el sentido, y sea*

$$\begin{aligned} \lambda_{\min} &= Arg\left\{\min_{\lambda\in T}\lambda\right\}, \forall\lambda\in T, \lambda \geq \lambda_{\min} \\ \lambda_{\max} &= Arg\left\{\max_{\lambda\in T}\lambda\right\}, \forall\lambda\in T, \lambda_{\max} \geq \lambda \end{aligned}$$

No eliminamos la posibilidad (teórica) de que $\lambda_{\min} = -\infty$ y/o $\lambda_{\max} = +\infty$. En consecuencia: a) de la definición de la integral de Riemman se tiene que para ejes de tiempo continuo $T = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \subset R$, entonces se tiene que para toda $\alpha \in K = R$, y para todas $f, g \in S_e(K, T)$ integrable (recuerde que $\int_{t\in T} f(t)\,dt = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} f(t)\,dt$)la suma generalizada cumple con

$$\begin{aligned} Ⓢ\int_{\lambda\in T} [\alpha f(\lambda) + g(\lambda)]\,\mu(\lambda) &= \int_{t\in T} [\alpha f(t) + g(t)]\,dt \\ &= \alpha \int_{t\in T} f(t)\,dt + \int_{t\in T} g(t)\,dt \\ &= \alpha \left\{ Ⓢ\int_{\lambda\in T} f(\lambda)\,\mu(\lambda) \right\} + Ⓢ\int_{\lambda\in T} g(\lambda)\,\mu(\lambda) \end{aligned}$$

y b) si la base de tiempo T es discreta, entonces $T = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \subset Z$, y para todas $f, g \in S_e(K,T)$ señales sumables. la suma generalizada

$$\begin{aligned}
Ⓢ\int_{\lambda\in T} [\alpha f(\lambda) + g(\lambda)]\,\mu(\lambda) &= \sum_{k\in T} [\alpha f(k) + g(k)] \\
&= \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} [\alpha f(k) + g(k)] \\
&= \alpha \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} f(k) + \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} g(k) \\
&= \alpha \left\{ Ⓢ\int_{\lambda\in T} f(\lambda)\,\mu(\lambda) \right\} + Ⓢ\int_{\lambda\in T} g(\lambda)\,\mu(\lambda)
\end{aligned}$$

Probando en esta manera: para todo escalar $\alpha \in K = R$, para todo par de señales $f, g \in S_e(T,K)$ sumables-s.g. se cumple que

$$Ⓢ\int_{\lambda\in T} [\alpha f(\lambda) + g(\lambda)]\,\mu(\lambda) = \alpha \left\{ Ⓢ\int_{\lambda\in T} f(\lambda)\,\mu(\lambda) \right\} + Ⓢ\int_{\lambda\in T} g(\lambda)\,\mu(\lambda)$$

y en consecuencia, la operacion suma generalizada es homogénea ($g = 0$) y aditiva ($\alpha = 1$), por lo tanto, Ⓢ$\int_{\lambda\in T} [.]\,\mu(\lambda)$ es lineal sobre S_e con respecto a $K = R$. ■

TEOREMA 11 *Sea $f \in S_e(T,K)$ un señal sumable-s.g., entonces*

$$\left| Ⓢ\int_{\lambda\in T} f(\lambda)\,\mu(\lambda) \right| \leq \left| Ⓢ\int_{\lambda\in T} f(\lambda)\,\mu(\lambda) \right|$$

DEMOSTRACION. *La prueba de esta propiedad se fundamentra en la bien conocida desigualdad: para todo $a, b \in K$, se cumple la desigualdad triangular*

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

En consecuencia, si T es continua:

$$\left| \int_{t\in T} f(t)\,dt \right| \leq \left| \int_{t\in T} f(t)\,dt \right|$$

Mientras que si T es una base de tiempo discreta:

$$\left| \sum_{k\in T} f(k) \right| \leq \sum_{k\in T} |f(k)|$$

■

Este resultado es interesante ya que demuestra que si una señal es absolutamente sumable-s.g. entonces es sumable-s.g.; sin embargo, lo contrario no es cierto como veremos a continuación.

TEOREMA 12 (No-negatividad) *Sea $f \in S_e(T, K)$ un señal sumable-s.g y no negativa, o sea, para todo $\lambda \in T$, $f(\lambda) \geq 0.$, entonces*

$$Ⓢ\int_{\lambda \in T} f(\lambda)\, \mu(\lambda) \geq 0$$

DEMOSTRACION. *La demostración se basa principalmente en la siguiente propiedad de los numeros reales: si $a, b \geq 0$ entonces*

$$0 \leq a + b$$

En consecuencia, si T es una eje de tiempo continuo es fácil demostrar, usando la definición de la integral de Riemman que

$$\int_{t \in T} f(t)\, dt \geq 0$$

Mientras que cuando T es discreta

$$\sum_{k \in T} f(k) \geq 0$$

Por lo tanto

$$Ⓢ\int_{\lambda \in T} f(\lambda)\, \mu(\lambda) \geq 0$$

■

TEOREMA 13 (Monotomía) *Sean $f, g \in S_e(T, K)$ tal que si $f \leq g$ y ambas sumables-s.g., entonces*

$$Ⓢ\int_{\lambda \in T} f(\lambda)\, \mu(\lambda) \leq Ⓢ\int_{\lambda \in T} g(\lambda)\, \mu(\lambda)$$

donde $f \leq g$ quiere decir que para todo $\lambda \in$

$$f(\lambda) \leq g(\lambda)$$

DEMOSTRACION. *Defina la señal $p = g - f$: para todo $\lambda \in T$*

$$p(\lambda) = [g - f](\lambda) = g(\lambda) - f(\lambda)$$

la cual es sumable-s.g por el teorema de lienalidad. Por lo tanto

$$Ⓢ\int_{\lambda \in T} [g(\lambda) - f(\lambda)]\, \mu(\lambda)$$

esta bien definida, y $p \geq 0$. Ahora y de acuerdo al teorema de no-negatividad:

$$Ⓢ\int_{\lambda \in T} [g(\lambda) - f(\lambda)]\,\mu(\lambda) \geq 0$$

y aplicando nuevamente el teorema de linealidad se obtiene:

$$Ⓢ\int_{\lambda \in T} g(\lambda)\,\mu(\lambda) - Ⓢ\int_{\lambda \in T} f(\lambda)\,\mu(\lambda) \geq 0$$

■

TEOREMA 14 *Sea $f \in S_e(T, K)$ una señal sumable-s.g., entonces*

1. *Si la base de tiempo $T = T_1 \cup T_2$ con $T_1 \cap T_2 \neq \varnothing$, entonces*

$$Ⓢ\int_{\lambda \in T} f(\lambda)\,\mu(\lambda) = Ⓢ\int_{\lambda \in T_1} f(\lambda)\,\mu(\lambda) + Ⓢ\int_{\lambda \in T_2} f(\lambda)\,\mu(\lambda) \tag{3}$$

2. *Si T es una base de tiempo, arbitraria pero fija, y con una relación de orden $\leq$, entonces T^{inv} es la base de tiempo inversa o reflejada de T y ordenada por $\leq^{inv}$ definida por: para todo $\lambda_i, \lambda_j \in T^{inv}$*

$$\lambda_i \leq^{inv} \lambda_j \Leftrightarrow \lambda_j \leq \lambda_i$$

Por lo tanto,

$$Ⓢ\int_{\lambda \in T} f(\lambda)\,\mu(\lambda) = -Ⓢ\int_{\lambda \in T^{inv}} f(\lambda)\,\mu(\lambda) \tag{4}$$

DEMOSTRACION. *La demostración de (3) es inmediata de la definición de suma generalizada y de las propiedades de la integral y de la sumatoria.*

Para probar (4) consideremos, en primer lugar, el caso de ejes de tiempo continuo, $T \subset R$, entonces

$$\begin{aligned} Ⓢ\int_{\lambda \in T^{inv}} f(\lambda)\,\mu(\lambda) &= \int_{t_{\max}}^{t_{\min}} f(t)\,dt \\ &= -\int_{t_{\min}}^{t_{\max}} f(t)\,dt \\ &= -\left\{Ⓢ\int_{\lambda \in T} f(\lambda)\,\mu(\lambda)\right\} \end{aligned}$$

Por otro lado, si la base de tiempo es discreta $T \subset Z$, entonces

$$\begin{aligned} Ⓢ\int_{\lambda \in T} f(\lambda)\,\mu(\lambda) &= \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} f(k) = \sum_{k=k_{\max}}^{k_{\min}} f(k) \\ &= -\sum_{k=k_{\max}}^{k_{\min}} f(k)\,(-1) \\ &= -\sum_{k \in T^{inv}} f(k)\,\mu(k) = -Ⓢ\int_{\lambda \in T^{inv}} f(\lambda)\,\mu(\lambda) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Es interesante observar que la propiedad de suma sobre T^{inv}, nos permite "aglomerar" en una sola operación de suma generalizada la propiedad de inversión en el orden de integracion (base de tiempo continua) y la inversión de los sumandos en la sumatoria (base de tiempo discreta).

TEOREMA 15 (Dilatación y Desplazamiento Temporal) *Suponga que se tienen dos bases de tiempo T^{vieja}, T^{nueva} donde $T^{vieja} = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ es una base de tiempo natural y $T^{nueva} = [\beta_{\min}, \beta_{\max}]$, y para los cuales existen escalares a, b tales que: i) para cada $\lambda \in T^{vieja}$,*

$$\beta = a\lambda + b \in T^{nueva}$$

y ii) para cada $\beta \in T^{nueva}$, existe un $\lambda \in T^{vieja}$ con

$$\lambda = \frac{\beta - b}{a}$$

Entonces

$$\circledS \int_{\lambda \in T^{vieja}} f(\lambda)\,\mu(\lambda) = \left|\frac{1}{a}\right| \circledS \int_{\beta \in T^{nueva}} f\left(\frac{\beta - b}{a}\right)\mu(\beta) \tag{5}$$

COMENTARIO 16 *Noten que en la relación (5) están involucradas dos operaciones sobre la base de tiempo T (escalamiento y desplazamiento temporal) y una operación de escalamiento sobre $S_e(T^{vieja}, K)$.*

DEMOSTRACION. *Es importante entender que se ha establecido una relacion biyectiva entre T^{vieja} y T^{nueva}*

$$\begin{aligned} \vartheta &: T^{vieja} \to T^{nueva} : \lambda \to \beta \\ \beta &= \vartheta(\lambda) = a\lambda + b \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \vartheta^{-1} &: T^{nueva} \to T^{vieja} : \beta \to \lambda \\ \lambda &= \vartheta^{-1}(\beta) = \frac{\beta - b}{a} \end{aligned}$$

Caso1*: Suponga que la base de tiempo es coninua, $T = [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \in R$, y donde no hemos excluido la posibilidad que $\lambda_{\min} = -\infty$ y/o $\lambda_{\max} = +\infty$, entonces*

$$\circledS \int_{\lambda \in T^{vieja}} f(\lambda)\,\mu(\lambda) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} f(t)\,dt$$

y se tiene

$$t = \frac{\beta - b}{a}$$

Si $a > 0$, *es evidente que*

$$\begin{aligned} \beta_{\min} &= at_{\min} + b \\ \beta_{\max} &= at_{\max} + b \\ dt &= \frac{1}{a} d\beta \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} Ⓢ\int_{\lambda \in T^{vieja}} f(\lambda)\,\mu(\lambda) &= \\ &= \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} f(t)\,dt = \int_{at_{\min}+b}^{at_{\max}+b} f\left(\frac{\beta-b}{a}\right)\frac{1}{a}d\beta \\ &= \frac{1}{a}\int_{at_{\min}+b}^{at_{\max}+b} f\left(\frac{\beta-b}{a}\right)d\beta \end{aligned}$$

Por otro lado, si $a < 0$, *entonces*

$$\begin{aligned} \beta_{\max} &= at_{\min} + b \\ \beta_{\min} &= at_{\max} + b \\ dt &= \frac{1}{a} d\beta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Ⓢ\int_{\lambda \in T^{vieja}} f(\lambda)\,\mu(\lambda) &= \\ &= \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} f(t)\,dt = \int_{at_{\max}+b}^{at_{\min}+b} f\left(\frac{\beta-b}{a}\right)\frac{1}{a}d\beta \\ &= -\frac{1}{a}\int_{at_{\min}+b}^{at_{\max}+b} f\left(\frac{\beta-b}{a}\right)d\beta \end{aligned}$$

Por lo tanto, y combinando los resultados obtenidos en estos dos subcasos

$$Ⓢ\int_{\lambda \in T^{vieja}} f(\lambda)\,\mu(\lambda) = \left|\frac{1}{a}\right| Ⓢ\int_{\beta \in T^{nueva}} f\left(\frac{\beta-b}{a}\right)\mu(\beta)$$

para $\lambda = t \in T = (-\infty. + \infty)$.

Caso 2: Suponga ahora que la base de tiempo es discreta, esto es, $T^{vieja} \subset Z$. *Por lo tanto,*

$$Ⓢ\int_{\lambda \in T^{vieja}} f(\lambda)\,\mu(\lambda) = \sum_{k \in T^{vieja}} f(k)\,\mu(k)$$

y se tiene

$$k = \frac{\beta - b}{a}$$

Si $a > 0$, *es evidente que* $k \in T = Z$ *y*

$$\begin{aligned}
\beta_{\min} &= ak_{\min} + b \\
\beta_{\max} &= ak_{\max} + b \\
\mu(k) &= k - k^{-} = \frac{\beta - b}{a} - \frac{(\beta - 1) - b}{a} = \frac{1}{a}\mu(\beta)
\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in T^{vieja}} f(k)\,\mu(k) &= \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} f(k)\,\mu(k) \\
&= \sum_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} f\left(\frac{\beta - b}{a}\right)\frac{1}{a}\mu(\beta) \\
&= \frac{1}{a}\sum_{\beta \in T^{nueva}} f\left(\frac{\beta - b}{a}\right)\mu(\beta) \\
&= \left(\frac{1}{a}\right)\sum_{\beta \in T^{nueva}} f\left(\frac{\beta - b}{a}\right)\mu(\beta) = \left(\frac{1}{a}\right) \text{Ⓢ} \int_{\beta \in T^{nueva}} f\left(\frac{\beta - b}{a}\right)\mu(\beta)
\end{aligned}$$

Es importante observar que $\mu(\beta) = a\mu(k)$.

Por otro lado, si $a < 0$, *entonces*

$$\begin{aligned}
k_{\min} &= \frac{\beta_{\max} - b}{a} \\
k_{\max} &= \frac{\beta_{\min} - b}{a}
\end{aligned}$$

T^{nueva} *es una base de tiempo inversa donde*

$$\begin{aligned}
k &= \frac{(\beta - 1) - b}{a} \\
k^{-} &= \frac{\beta - b}{a}
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mu(k) &= k - k^{-} = \frac{(\beta - 1) - b}{a} - \frac{\beta - b}{a} \\
&= -\frac{1}{a}\mu(\beta)
\end{aligned}$$

Como resultado de todo lo anterior:

$$\begin{aligned}
\circledS \int_{\lambda \in T^{vieja}} f(\lambda)\,\mu(\lambda) &= \sum_{k \in T^{vieja}} f(k)\,\mu(k) = \sum_{k=k_{\min}}^{k_{\max}} f(k)\,\mu(k) \\
&= \sum_{\beta=\beta_{\max}}^{\beta_{\min}} f\left(\frac{\beta-b}{a}\right)\left[-\frac{1}{a}\mu(\beta)\right] \\
&= \left(-\frac{1}{a}\right)\sum_{\beta=\beta_{\max}}^{\beta_{\min}} f\left(\frac{\beta-b}{a}\right)\mu(\beta) \\
&= \left(-\frac{1}{a}\right)\sum_{\beta \in T^{nueva}} f\left(\frac{\beta-b}{a}\right)\mu(\beta) = \left(-\frac{1}{a}\right)\circledS \int_{\beta \in T^{nueva}} f\left(\frac{\beta-b}{a}\right)\mu(\beta)
\end{aligned}$$

Nuevamente, debemos recalcar que en este subcaso $\mu(\beta) = -a\mu(k)$ *.*

Finalmente, combinando los resultados de los subcasos considerados, tenemos

$$\begin{aligned}
\circledS \int_{\lambda \in T^{vieja}} f(\lambda)\,\mu(\lambda) &= \frac{1}{|a|}\sum_{\beta=\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} f\left(\frac{\beta-b}{a}\right)\mu(\beta) \\
&= \frac{1}{|a|}\circledS \int_{\beta \in T^{nueva}} f\left(\frac{\beta-b}{a}\right)\mu(\beta)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para una base de tiempo generalizada T*, se cumple que*

$$\circledS \int_{\lambda \in T^{vieja}} f(\lambda)\,\mu(\lambda) = \frac{1}{|a|}\circledS \int_{\beta \in T^{nueva}} f\left(\frac{\beta-b}{a}\right)\mu(\beta)$$

como queríamos demostrar. ■

Lo interesante es que en casi todas las demostraciones realizadas, las aseveraciones postuladas sobre las sumas generalizadas se han descompuesto en dos casos particulares, pero exhaustivos, a saber, el de las bases de tiempo continuo y el correspondiente a las bases de tiempo discreto. De ahora en adelante, casi todas las demostraciones que involucren sumas generalizadas se harán de manera integrada.empleando solamente los teoremas hasta ahora comprobados.

Otra operación que involucra dos señales (binaria) es la "derivada generalizada" σ sobre $S_e = S_e(T, K)$, y definida como

$$\sigma : S_e \to S_e : f \longmapsto \sigma f$$

donde para todo $\lambda \in T$

$$[\sigma f](\lambda) = \begin{cases} \frac{d}{dt} f(t), & \lambda = t, \\ q f(k), & \lambda = k. \end{cases}$$

y

$$q : S_e \to S_e : f \longmapsto qf$$

es el operador de desplazamiento o avance unitario; o sea, para todo $k \in T$

$$[qf](k) = f(k+1)$$

COMENTARIO 17 *i) La operación derivada generalizada, σ, se considera una operación binaria ya que la versión de tiempo continuo, la derivada, opera sobre dos señales (f y $g = f$ desplazada), esto es*

$$\frac{d}{dt} f(t) = [\sigma f](t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

ii) ¿Por qué usar el operador desplazamiento de avance unitario, q, y no el operador "diferencia de avance":

$$\nabla : S_e \to S_e : f \to \nabla f$$

donde para todo $k \in T \subset Z$,

$$[\nabla f](k) = f(k+1) - f(k)$$

o si $k \in T \subset Z(h)$,

$$[\nabla f](kh) = \frac{f[(k+1)h] - f(h)}{h}$$

con $h > 0$.? No hay una respuesta sencilla y racional. Por tradición, tanto en la teoría de Sistemas de control, Automatización, Procesamiento Digital de Señales, etc., se emplea constantemente el operador desplazamiento unitario q, a pesar de que la operación sobre señales de tiempo discreto similar a la derivada sobre señales de tiempo continuo, es la diferencia por avance.

iii) La aplicación identidad ι sobre el conjunto de señales S_e, se define como

$$\iota : S_e \to S_e : f \to \iota(f) = f$$

Entonces para todo $n \in Z_+$, para toda $f \in S_e$, las operaciones recurrentes de σ sobre f se construyen mediante la relación:

$$\begin{aligned} \sigma^n f &= \sigma\left[\sigma^{n-1} f\right] \\ \sigma^0 &= \iota \end{aligned}$$

iii) La operación inversa a la derivada generalizada es

$$\sigma^{-1} : S_e \to S_e : f \longmapsto \sigma^{-1} f$$

donde para todo $\lambda \in T$

$$\left[\sigma^{-1} f\right](\lambda) = \begin{cases} \int_{t \in T} f(t)\, dt, & \lambda = t, \\ q^{-1} f(k), & \lambda = k. \end{cases}$$

y

$$q^{-1} : S_e \to S_e : f \longmapsto q^{-1} f$$

es el operador de retardo unitario; o sea, para todo $k \in T$

$$\left[q^{-1} f\right](k) = f(k-1)$$

Donde suponemos que la base de tiempo T *es cerrada con respecto al operador retardo unitario.*

EJEMPLO 18 *La utilidad y justificación de esta operación de derivada generalizada la ilustramos con dos aplicaciones matemáticas concretas y que usaremos reiteradamente en las notas sobre sistemas lineales e invariantes en el tiempo.*

1. *Considere la siguiente ecuación diferencial*

$$\frac{d^3}{dt^3} y(t) + 3\frac{d^2}{dt^2} y(t) - 2\frac{d}{dt} y(t) + 5y(t) = 6\frac{d^2}{dt^2} u(t) - \frac{d}{dt} u(t) + 7u(t) \qquad (6)$$

para $\in R$. *Entonces usando la correspondencia*

$$\sigma^i = \frac{d^i}{dt^i}$$
$$\sigma^0 = \iota = \text{operador "identidad"}$$

para $i \in Z_+$, *obtenemos*

$$\begin{aligned} \frac{d^3}{dt^3} y(t) + 3\frac{d^2}{dt^2} y(t) - 2\frac{d}{dt} y(t) + 5y(t) &= \\ &= \sigma^3 y(t) + 3\sigma^2 y(t) - 2\sigma y(t) + 5\iota y(t) \\ &= \left[\sigma^3 + 3\sigma^2 - 2\sigma + 5\iota\right] y(t) \\ &= \underbrace{\left[\sigma^3 + 3\sigma^2 - 2\sigma + 5\right]}_{D(\sigma)} y(t) \end{aligned}$$

De igual manera

$$6\frac{d^2}{dt^2} u(t) - \frac{d}{dt} u(t) + 7u(t)) = \underbrace{\left[6\sigma^2 - \sigma + 7\right]}_{n(\sigma)} u(t)$$

Y por lo tanto, la ecuación diferencial (6) puede representarse como

$$D(\sigma)\,y(t) = N(\sigma)\,u(t)$$

donde

$$\begin{aligned} D(\sigma) &= \sigma^3 + 3\sigma^2 - 2\sigma + 5 \\ N(\sigma) &= 6\sigma^2 - \sigma + 7 \end{aligned}$$

2. *Considere la siguiente ecuación de diferencias*

$$y(k+3) + 3y(k+2) - 2y(k+1) + 5y(k) = 6u(k+2) - u(k+1) + 7u(k) \quad (7)$$

para $k \in Z$. Entonces usando la correspondencia

$$\begin{aligned} \sigma^i &= q^i \\ & \sigma^0 = \iota = \text{operador "identidad"} \end{aligned}$$

para $i \in Z_+$, obtenemos

$$\begin{aligned} y(k+3) + 3y(k+2) - 2y(k+1) + 5y(k) &= \\ &= \sigma^3 y(k) + 3\sigma^2 y(k) - 2\sigma y(k) + 5\iota y(k) \\ &= \left[\sigma^3 + 3\sigma^2 - 2\sigma + 5\iota\right] y(k) \\ &= \underbrace{\left[\sigma^3 + 3\sigma^2 - 2\sigma + 5\right]}_{D(\sigma)} y(k) \end{aligned}$$

De igual manera

$$6u(k+2) - u(k+1) + 7u(k) = \underbrace{\left[6\sigma^2 - \sigma + 7\right]}_{n(\sigma)} u(k)$$

Y por lo tanto, la ecuación de diferencias (7) puede representarse como

$$D(\sigma)\,y(k) = N(\sigma)\,u(k)$$

donde

$$\begin{aligned} D(\sigma) &= \sigma^3 + 3\sigma^2 - 2\sigma + 5 \\ N(\sigma) &= 6\sigma^2 - \sigma + 7 \end{aligned}$$

3. *Noten que a pesar de lo distinto en estructura y significado de las ecuaciones (6 y 7) amabas son integradas en una y solo una representación*

$$\begin{aligned} D(\sigma)\,y(\lambda) &= N(\sigma)\,u(\lambda) \\ D(\sigma) &= \sigma^3 + 3\sigma^2 - 2\sigma + 5 \\ N(\sigma) &= 6\sigma^2 - \sigma + 7 \end{aligned}$$

para $\lambda \in T$.

También es posible definir la operación inversa a la "diferencia generalizada"

$$\sigma^{-1} : S_e \to S_e$$

donde para toda señal $f \in S_e$, para todo $\lambda \in T$:

$$\left[\sigma^{-1} f\right](\lambda) = \begin{cases} \int_T f(\tau)\, d\tau, & \lambda = t, \\ \left[q^{-1} f\right](k) = f(k-1), & \lambda = k. \end{cases}$$

EJEMPLO 19 *Considere la señal $f \in S_e$, con base de tiempo $T = [0, \infty)$ definida por*

$$f(\lambda) = \begin{cases} e^{-3\lambda}, & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Tomando en cuenta que

$$\int_0^t e^{-3\tau} d\tau = \left[\frac{-1}{3} e^{-3\tau}\right]_{\tau=0}^{t} = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)$$

Entonces

$$\left[\sigma^{-1} f\right](\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right) esc(t), & \lambda = t, \\ \left[q^{-1} f\right](k) = e^{-3(k-1)} esc(k-1), & \lambda = k. \end{cases}$$

1.1.2 Convolución y Correlación

Dado el conjunto de señales con base de tiempo T y valores en el conjunto K

$$S_e = S_e(T, K) = \{f : T \to K\}$$

y sobre el cual está definido la operación de suma generalizada (2). Podemos definir la operación binaria denominada "convolución"

$$* : S_e \times S_e \to S_e : (f, g) \longmapsto f * g$$

donde para cada $\lambda \in T$

$$\begin{aligned} [f * g](\lambda) &= \text{Ⓢ}\int_{\tau \in T} f(\lambda - \tau)\, g(\tau)\, \mu(\tau) \\ &= \begin{cases} \int_{\tau \in T} f(t - \tau)\, g(t)\, dt, & \lambda = t, \\ \sum_{\tau \in T} f(k - \tau)\, g(k), & \lambda = k. \end{cases} \end{aligned} \tag{8}$$

esta operación se estudiará con más detalle cuando analicemos los sistemas lineales e invariantes en el tiempo.

Otra operacion binaria de mucha importancia sobre S_e es la bien conocida (en sistemas de telecomunicación, procesamiento de imágenes, sistemas de control, estocástico) "correlación de señales"

$$\circledast : S_e \times S_e \to S_e : (f, g) \longmapsto f \circledast g$$

donde para cada $\tau \in T$

$$\begin{aligned} [f \circledast g](\tau) &= R_{fg}(\tau) = Ⓢ \int_{\lambda \in T} f(\lambda)\, g^*(\lambda - \tau)\, \mu(\lambda) \qquad (9) \\ &= \begin{cases} \int_{t \in T} f(t)\, g^*(t - \tau)\, dt, & \lambda = t, \\ \sum_{k \in T} f(k)\, g^*(k - \tau), & \lambda = k. \end{cases} \end{aligned}$$

donde $(.)^*$ repersenta el complejo conjugado, y en consecuencia estamos suponiendo implictamente que $K = C$.

De inmediato, se observa que no hay diferencia cuando se desplaza g a la derecha (atrazo) o a la izquierda (adelanto) en la definición de correlación (9), vemos entonces que

$$\begin{aligned} [f \circledast g](\tau) &= R_{fg}(\tau) = Ⓢ \int_{\lambda \in T} f(\lambda)\, g^*(\lambda + \tau)\, \mu(\lambda) \\ &= \begin{cases} \int_{t \in T} f(t)\, g^*(t + \tau)\, dt, & \lambda = t, \\ \sum_{k \in T} f(k)\, g^*(k + \tau), & \lambda = k. \end{cases} \end{aligned}$$

Otras operaciones binarias sobre S_e son posibles y no son nada convencionales, y se presentan con el objetivo de concientizar al lector de que existen sistemas donde las operaciones de suma o multiplicación de señales pueden ser muy diferentes a las que él o ella están acostumbrados. Algunas de dichas operaciones binarias se definen a continuación.

- (Máximo) La siguiente operación es fundamental en el análisis de sistemas de manufactura:

  $$\oplus : S_e \times S_e \to S_e : (u, w) \mapsto u \oplus w$$

  donde para cada $\lambda \in T$

  $$(u \oplus w)(\lambda) = \max\{u(\lambda), w(\lambda)\}$$

- (Mínimo) La siguiente operación es también es importante en el análisis de sistemas de manufactura:

  $$\ominus : S_e \times S_e \to S_e : (u, w) \mapsto u \ominus w$$

  donde para cada $\lambda \in T$

  $$(u \ominus w)(\lambda) = \min\{u(\lambda), w(\lambda)\}$$

Todas las operaciones se han definido punto a punto sobre el eje de tiempo T , lo que quiere decir que el valor de la resultante de aplicar la operación en un instante $t \in \mathcal{T}$ solo depende de los valores en dicho instante de las señales sobre las se opera. Y en consecuencia, las señales necesariamente deben poseer el mismo eje de tiempo.

References

[1] Mason, Samuel J.y H.J. Zimmermann. "Circuitos, señales y Sistemas electrónicos". CICSA, Ciuedad de Mexico. Mexico 1962.

[2] Klir, George J. "An Approach to General Systems theory". Van Nostrand Reinhold Company. New York. USA. 1969.

[3] Ziegler, P., H., Praehofer, T. G.Kim. "Theory of Modeling and Simulation", Second Edition. Academic Press. San Diego. USA, 2000.

[4] Kolmogorov, A.N. y S.V. Fomin. "Elementos de la Teoría de Funciones y del Análsis Funcional". Segunda Edición. Editorial MIR. Moscú, Rusia. 1975

[5] Kwakernaak, H. y R. Sivan. "Modern Signals and Systems". Prentice Hall. New Jersey. USA. 1991

[6] Lindner, K.D., "Introducción a las Señales y los Sistemas". McGraw Hill. Colombia. 2002.

[7] Ziemer R. E.,W. Tranter, D. Fannin. "Signals and Systems: Continuous and Discrete". Second Edition. MacMillan Publishing Company. New York, USA. 1989

[8] http://es.scribd.com/doc/62488949/Lab-1

[lathi] Lathi, B. P.. "Signals, Systems and Communications". John Wiley and Sons. New York, USA. 1965.

[9] Burdic, W.